BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

NGUYỄN THỊ HỒNG

TOÁN TỬ TÍCH PHÂN LOẠI HARDY VÀ CÁC GIAO HOÁN TỬ CỦA CHÚNG TRÊN MỘT SỐ KHÔNG GIAN HÀM

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số: 9.46.01.03

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2019

Luận án được hoàn thành tại: Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Người hướng dẫn khoa học: 1. GS.TSKH. Nguyễn Minh Chương
2. TS. Hà Duy Hưng

Phản biện 1: GS. TSKH. Vũ Ngọc Phát, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Phản biện 2: PGS. TS. Khuất Văn Ninh, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2

Phản biện 3: PGS. TS. Trần Đình Kế, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Trường họp tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội vào hồi .... giờ .... ngày .... tháng .... năm .....

Có thể tìm hiểu luận án tại thư viện: Thư viện Quốc Gia, Hà Nội
hoặc Thư viện Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

MỞ ĐẦU

1. LỊCH SỬ VẤN ĐỀ VÀ LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Một trong những vấn đề cốt lõi của giải tích điều hòa là nghiên cứu tính bị chặn của các toán tử T trên một số không gian hàm và một số không gian hàm suy rộng

$$||Tf||_Y \leq C||f||_X, \tag{1}$$

với C là hằng số nào đó, X, Y là hai không gian hàm hoặc hàm suy rộng với chuẩn tương ứng là $||\cdot||_X; ||\cdot||_Y$. Đây là câu hỏi xuất hiện một cách tự nhiên trong các nghiên cứu về giải tích, lý thuyết hàm, phương trình đạo hàm riêng. Chẳng hạn, ta xét toán tử Riesz J_α cho bởi công thức hình thức

$$J_\alpha(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} dy \tag{2}$$

Với $1 \leq p < \frac{d}{\alpha}$ và $q = \frac{dp}{d-\alpha p}$ thì J_α bị chặn từ $L^p(\mathbb{R}^d)$ vào $L^q(\mathbb{R}^d)$. Một áp dụng trực tiếp kết quả này là định lý nhúng Sobolev-Gagliardo-Nirenberg: không gian $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ được nhúng liên tục vào trong $L^q(\mathbb{R}^d)$, với $1 \leq p \leq q \leq p^*$, trong đó $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$.

Một trong những đối tượng nghiên cứu chính của luận án này là nghiên cứu (1) cho một lớp toán tử tích phân và giao hoán tử của chúng. Lớp toán tử này chứa đựng hoặc có mối liên hệ mật thiết với nhiều toán tử cổ điển quan trọng như toán tử Hardy, toán tử cực đại Calderón, toán tử Riemann-Lioville trên đường thẳng, trường hợp một chiều của toán tử J_α nói trên. Các ước lượng dạng (1) khi đó vẫn thường gọi là bất đẳng thức Hardy. Về lịch sử, bất đẳng thức tích phân Hardy và dạng rời rạc của nó ra đời khoảng những năm 1920, liên quan đến tính liên tục của toán tử trung bình Hardy giữa các không gian L^p. Một trong những động lực chính dẫn tới các kết quả đó được xuất phát từ bất đẳng thức Hilbert. Nhà toán học Hilbert, trong khi nghiên cứu nghiệm của một số phương trình tích phân, dẫn tới bài toán nghiên cứu tính hội tụ của chuỗi kép dạng $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n}$. Trong bài báo năm 1915 của mình Hardy đã chỉ ra sự hội

tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m a_n}{m+n}$ tương đương với sự hội tụ của hai chuỗi sau

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n A_n}{n} \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2,$$

trong đó $A_n = a_1 + \cdots + a_n$. Từ đây dẫn tới dạng tích phân của kết quả này chính là: nếu một hàm f thuộc $L^p(\mathbb{R}^+)$, với $1 < p < \infty$ thì Hf cũng thuộc $L^p(\mathbb{R}^+)$, trong đó

$$Hf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt. \tag{3}$$

Năm 1920 G. Hardy đã đưa ra bất đẳng thức tích phân sau đây

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty} f^p(x)dx. \tag{4}$$

với $1 < p < \infty$, f là hàm đo được không âm trên $(0,\infty)$, và hằng số $\frac{p}{p-1}$ là số nhỏ nhất thoả mãn.

Toán tử Hardy là một trường hợp riêng của lớp toán tử Hausdorff, xuất hiện trong các bài toán nghiên cứu tính khả tổng cho chuỗi số, chuỗi luỹ thừa với các công trình mang tính nền móng của Siskakis và của Liflyand-Móricz. Trên trường thực, toán tử Hausdorff có dạng sau

$$\mathcal{H}_{\Phi,A}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(u) f(xA(u))du \tag{5}$$

với Φ là hàm đo được trên $\mathbb{R}^d$ và $A = A(u) = (a_{ij}(u))$ là ma trận cấp $d \times d'$ trong đó $a_{ij}(u)$ là hàm đo được theo biến u. Đặc biệt, khi $\Phi(u) = \chi_{[0,1]}(u)$, $A(u) = u$ thì $\mathcal{H}_{\Phi,A}$ trở thành toán tử Hardy cổ điển như đã đề cập ở trên.

Một câu hỏi tự nhiên đặt ra, với các không gian X, Y nào và với các điều kiện nào của Φ, ma trận A thì (1) đúng với $T = \mathcal{H}_{\Phi,A}$. Hơn nữa, khi đó thì hằng số tốt nhất C trong (1) là bao nhiêu? Câu hỏi thứ nhất từ lâu đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới và có thể chỉ ra một số kết quả gần đây của K. Andersen, E. Liflyand, F. Möricz, D.S. Fan. Tuy nhiên các điều kiện cần về tính bị chặn được đưa ra chưa hẳn là điều kiện đủ và câu hỏi về hằng số tốt nhất trong mỗi trường hợp đó đều không dễ trả lời. Với câu hỏi thứ hai về việc xác định hằng số tốt nhất trong các ước lượng dạng (1) cho các lớp toán tử trung bình có hai hướng: Thứ nhất là cho lớp toán tử trung bình trên hình cầu

có dạng

$$\mathcal{H}(f)(x) = \frac{1}{\Omega_d |x|^d} \int\limits_{|y|<|x|} f(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}. \tag{6}$$

Grafakos và Lacey chứng minh được rằng chuẩn L^p của $\mathcal{H}$ bằng $\dfrac{p}{p-1}$. Một số công trình nghiên cứu tiếp theo liên quan của các tác giả như Lin, Fu, Lu....

Thứ hai, đối với lớp toán tử trung bình dọc theo cung tham số cho bởi dạng

$$U_\psi f(x) = \int_0^1 f(tx)\psi(t)dt, \tag{7}$$

Đây là lớp toán tử có nhiều ứng dụng cao trong lý thuyết toán tử, phương trình vi phân đạo hàm riêng, bởi nó chứa nhiều toán tử cổ điển như toán tử Abel, Rieman-Liouville, toán tử Hardy, toán tử cực đại Calderón. Năm 2001, J. Xiao công bố một kết quả mang tính đột phá: U_ψ bị chặn trên $L^q(\mathbb{R}^d)$ khi và chỉ khi $\int_0^1 t^{\frac{-d}{q}}\psi(t)dt$ hữu hạn. Hơn nữa,

$$||U_\psi||_{L^q(\mathbb{R}^d)\to L^q(\mathbb{R}^d)} = \int_0^1 t^{\frac{-d}{q}}\psi(t)dt. \tag{8}$$

Tương tự, U_ψ bị chặn trong BMO khi và chỉ khi $\int_0^1 \psi(t)dt$ hữu hạn và khi đó

$$||U_\psi||_{BMO(\mathbb{R}^d)\to BMO(\mathbb{R}^d)} = \int_0^1 \psi(t)dt. \tag{9}$$

Năm 2009, dựa trên phương pháp nghiên cứu cho các giao hoán tử của Calderón-Coifmann-Weiss, các tác giả Fu, Liu và Lu chứng minh rằng $[M_b, U_\psi]$ bị chặn trong $L^q(\mathbb{R}^d)$ với mọi $b \in BMO(\mathbb{R}^d)$ khi và chỉ khi

$$\int\limits_0^1 t^{-d/q}\psi(t)\log\frac{2}{t}dt < \infty.$$

Ở đây M_b là toán tử nhân $M_b(f) = bf$. Kết quả này cho thấy rằng giao hoán tử của U_ψ là "kì dị hơn" so với U_ψ.

Hai kết quả nền tảng nói trên là động lực cho nhiều nghiên cứu sau này cho lớp toán tử U_ψ. Đây cũng là hướng nghiên cứu chính mà tác giả lựa chọn trong luận án này: nghiên cứu các ước lượng chuẩn cho toán tử đa tuyến tính có dạng sau

$$U^{m,n}_{\psi,\overrightarrow{s}}\left(\overrightarrow{f}\right)(x) = \int_{[0,1]^n}\left(\prod_{k=1}^n f_k\left(s_k(t)x\right)\right)\psi(t)dt. \tag{10}$$

Trường hợp $m = n = 1$, Chuong và Hung tìm ra được điều kiện cần và đủ (với điều kiện thích hợp trên $s(t)$) của ψ để đảm bảo tính bị chặn của $U^{1,1}_{\psi,s}$ và các giao hoán tử của nó trong L^p và BMO với trọng thuần nhất. Chuẩn của toán tử tương ứng cũng được tìm ra. Một điều kiện cần của trọng để giao hoán tử $[M_b, U_{\psi,s}]$ bị chặn trong L^p cũng được đưa ra. Trong trường hợp không gian Herz, năm 2016, Chuong, Hung và Duong đưa ra một điều kiện cần cho tính bị chặn của giao hoán tử khi b thuộc không gian Lipschitz. Hung và Ky đưa ra các tiêu chuẩn để $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ bị chặn từ $L^{p_1}_{\omega_1}(\mathbb{R}^d) \times \cdots \times L^{p_m}_{\omega_m}(\mathbb{R}^d)$ vào $L^p_\omega(\mathbb{R}^d)$ và bị chặn từ $\dot{B}^{p_1,\lambda_1}\left(\mathbb{R}^d\right) \times \cdots \times \dot{B}^{p_m,\lambda_m}\left(\mathbb{R}^d\right)$ vào $\dot{B}^{p,\lambda}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Hơn nữa chuẩn của toán tử trong từng trường hợp cũng được chỉ ra.

Tuy nhiên các tiêu chuẩn về tính bị chặn, chuẩn của $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ cùng giao hoán tử của nó trên các không gian loại Herz chưa được nghiên cứu trước đó. Các không gian loại Herz bên cạnh là những mở rộng tự nhiên của các không gian Lebesgue, còn có vai trò quan trọng trong phát triển lý thuyết hàm. Chẳng hạn, các hàm phân tử Taibleson-Weiss, đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết các không gian Hardy, thuộc không gian loại Herz. Việc thiết lập các tính chất bị chặn và ước lượng chuẩn trên không gian loại Herz đòi hỏi phải thay đổi phương pháp tiếp cận so với các kết quả đã biết trên các không gian Lebesgue hay tâm Morrey.

Các phân tích tổng quan trên đây dẫn chúng tôi đến việc nghiên cứu câu hỏi về tính bị chặn và chuẩn của toán tử trong (10) từ tích các không gian loại Herz và Morrey-Herz với trọng luỹ thừa. Chúng tôi cũng đặt vấn đề nghiên cứu giao hoán tử của $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ trên tích các không gian Morrey-Herz. Những kết quả nghiên cứu đạt được, được chúng tôi công bố trong bài báo số 3, trong danh mục công trình liên quan đến luận án, và được trình bày trong chương 4 của Luận án này.

Giải tích trên trường số $p-$adic hay trên các nhóm Heisenberg được quan tâm và phát triển mạnh trong những năm gần đây. Trong đề tài này, chúng tôi lựa chọn nghiên cứu một số kêt quả của giải tích điều hoà trên trường địa phương mà cụ thể ở đây là các toán tử trung bình loại Hardy trên trường số $p-$adic. Năm 2006, Rim và Lee phát triển các kết quả của J. Xiao cho toán tử trung bình Hardy $p-$adic có dạng sau

$$U^p_\psi f(x) = \int_{\mathbb{Z}_p^\star} f(tx)\psi(t)dt, \tag{11}$$

với ψ là hàm không âm xác định trên vành số nguyên $p-$adic. Năm 2014, tác giả H.D. Hung phát triển kết quả của Rim và Lee cho lớp toán tử $p-$adic Hardy-

Cesàro $U^p_{\psi,s}$, trong các không gian với trọng luỹ thừa, trong đó

$$U^p_{\psi,s}f(x) = \int_{\mathbb{Z}_p^\star} f\left(s(t)x\right)\psi(t)dt, \tag{12}$$

Bên cạnh các kết quả về tính bị chặn, chuẩn của $U_{\psi,s}$ trên không gian $p-$adic Lebesgue và BMO có trọng, tác giả chỉ ra được một hệ quả về sự hội tụ của chuỗi kép trên trường thực như sau

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_{j+\beta k}\, y_k\right)^r\right)^{1/r} \leq \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j^r\right)^{1/r}\left(\sum_{k=0}^{\infty} y_k\right). \tag{13}$$

với $(x_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ và $(y_k)_{k\geq 0}$ là hai dãy số không âm, β là số nguyên không âm tùy ý và với bất kỳ $1 \leq r < \infty$. Kết quả này cho ta thấy mối liên hệ giữa giải tích p-adic và giải tích thực, việc nghiên cứu giải tích $p-$adic mang lại một công cụ để nghiên cứu giải tích trên trường thực. Tương tự kết quả trong trường thực, Wu và Fu(2017)tìm ra được các điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của U_ψ trong không gian Morrey $p-$adic $L^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$, không gian Morrey tâm $p-$adic $\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$ và $CBMO^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$. Hơn nữa chuẩn toán tử tương ứng cho các trường hợp cũng được tìm ra.

Theo hướng này chúng tôi đặt bài toán phát triển các kết quả của Wu và Fu(2017) cho lớp toán tử $U^p_{\psi,s}$ với các không gian tương ứng có trọng luỹ thừa. Dựa trên công trình của Fu và cộng sự(2015), Hung, Ky(2015), Chuong và Duong(20116) chúng tôi xây dựng lớp toán tử đa tuyến tính $p-$adic gắn với toán tử $U^p_{\psi,s}$. Chúng tôi nghiên cứu các kết quả mà Hung, Ky, Fu, Lu, Gong, Yuan đạt được trong trường hợp thực, cho trường số $p-$adic.

2. MỤC ĐÍCH – ĐỐI TƯỢNG – PHẠM VI NGHIÊN CỨU

Luận án tập trung nghiên cứu toán tử Hardy-Cesàro, toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro và các giao hoán tử của chúng trong các không gian hàm trên trường thực và $p-$adic, cụ thể như sau:

- **Nội dung 1:** Ước lượng chuẩn của toán tử p-adic Hardy-Cesàro có trọng và giao hoán tử trên các không gian p-adic kiểu Morrey có trọng.
- **Nội dung 2:** Ước lượng chuẩn của toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro có trọng trên các không gian hàm p-adic:
- **Nội dung 3:** Ước lượng chuẩn của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro và giao hoán tử trên tích các không gian Herz thuần nhất có trọng, Morrey-Herz có trọng thuần nhất.

3. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Để nghiên cứu chuẩn của toán tử Hardy-Cesàro có trọng, toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng trên trường thực hay p-adic và giao hoán tử của nó trên các không gian $p-$adic kiểu Morrey có trọng, tích các không gian kiểu Herz,.... chúng tôi đã sử dụng lược đồ nghiên cứu sẵn có trên giải tích thực, giải tích p-adic, lý thuyết toán tử, bất đẳng thức Hölder, bất đẳng thức Minkowski, các bất đẳng thức. Hơn nữa để đánh giá tính bị chặn của giao hoán tử của toán tử $p-$adic Hardy-Cesàro có trọng chúng tôi sử dụng phương pháp biến thực của Coifman.

4. CẤU TRÚC CỦA LUẬN ÁN

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Danh mục công trình đã công bố và Tài liệu tham khảo, luận án được chia làm bốn chương:

- **Chương 1:** *Kiến thức chuẩn bị.*
- **Chương 2:** *Toán tử p-adic Hardy-Cesàro và giao hoán tử trên các không gian kiểu Morrey .*
- **Chương 3:** *Toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro và giao hoán tử trên một số không gian hàm p-adic.*
- **Chương 4:** *Toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro và giao hoán tử trên tích các không gian loại Herz.*

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức chuẩn bị, bao gồm: Lý thuyết số p-adic, độ đo và tích phân trên trường p-adic, các không gian hàm và một vài ví dụ về các hàm chọn, các bất đẳng thức Hölder, Minkowski và một số định lí thường dùng.

1.1. Trường các số $p-$adic

Trong phần này, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm về số p-adic, chuẩn p-adic, trường các số p-adic và một số tính chất.

1.2. Độ đo và tích phân trong $\mathbb{Q}_p^d$

Trong phần này, chúng tôi nhắc lại các kiến thức cơ bản về độ đo và tích phân trong giải tích p-adic và một vài ví dụ.

1.3. Các không gian hàm

Trong phần này, chúng tôi nhắc lại một số không gian hàm cần dùng trong luận án như: Không gian Lebesgue, không gian Herz, không gian Morrey-Herz, không gian BMO, không gian Morrey trên trường thực và p-adic và môt số ví dụ minh họa, các bất đẳng thức Hölder, Minkowski và một số định lí thường dùng

Chương 2

TOÁN TỬ P-ADIC HARDY-CESÀRO VÀ GIAO HOÁN TỬ TRÊN CÁC KHÔNG GIAN KIỂU MOREY

Nội dung của chương này là nghiên cứu chuẩn của toán tử p-adic Hardy-Cesàro trên các không gian kiểu Morrey. Đầu tiên chúng tôi đặt vấn đề nghiên cứu bài toán. Để giải quyết bài toán, chúng tôi vận dụng ý tưởng của phương pháp biến thực đối với các toán tử tích phân Hardy, một số kết quả cơ bản về giải tích điều hoà trên trường $p-$adic, kết hợp đánh giá thông qua các bất đẳng thức Minkowski, Hölder và việc xây dựng hàm thử để có bất đẳng thức ngược. Cuối cùng dựa theo phương pháp của Coifman-Rochberg-Weiss(1976) chúng tôi tìm được một điều kiện cần và một điều kiện đủ của hàm trọng $\psi(t)$ để giao hoán tử của toán tử này bị chặn trên các không gian p-adic tâm Morrey với biểu trưng trong không gian p-adic tâm BMO có trọng.

Nội dung của chương này là dựa trên bài báo 1. trong danh mục công trình đã công bố.

2.1. Đặt vấn đề

Bài toán mà chúng tôi quan tâm ở đây là nghiên cứu chuẩn của toán tử Hardy-Cesàro $U^p_{\psi,s}$ trong các không gian Morrey trên trường $p-$adic.

2.2. Chuẩn của toán tử $U^p_{\psi,s}$ trên các không gian kiểu Morrey

Định nghĩa 2.1. Cho $s : \mathbb{Z}_p^\star \to \mathbb{Q}_p$ và $\psi : \mathbb{Z}_p^\star \to \mathbb{R}_+$ là các hàm đo được và $\omega : \mathbb{Q}_p^d \to \mathbb{R}_+$ là hàm khả tích địa phương. Toán tử $p-$adic Hardy-Cesàro với trọng $U^p_{\psi,s}$ được xác định như sau

$$U^p_{\psi,s} f(x) = \int_{\mathbb{Z}_p^\star} f\left(s(t)x\right)\psi(t)dt \tag{2.1}$$

trong đó f là hàm đo được $\mathbb{Q}_p^d$. Ta kí hiệu U^p_ψ thay cho $U^p_{\psi,s}$ khi $s(t) = t$.

Định nghĩa 2.2. Với $\alpha > -d$, ta kí hiệu $\mathcal{W}^p_\alpha$ là tập gồm tất cả các hàm không âm, khả tích địa phương ω trên $\mathbb{Q}_p^d$ sao cho $\omega(tx) = |t|_p^\alpha \omega(x)$ với mọi $x \in \mathbb{Q}_p^d$ và $t \in \mathbb{Q}_p^\star$ và $0 < \int_{S_0} \omega(x)dx < \infty$.

Định lí 2.1. *Cho* $1 \leq q < \infty, -\frac{1}{q} < \lambda \leq 0$ *là các số thực. Cho* ψ *là một hàm không âm, đo được trên* $\mathbb{Z}_p^\star$. *Khi đó các mệnh đề sau là tương đương*

(1) $\mathcal{A} := \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star} |s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda}\psi(t)dt$ *hữu hạn.*

(2) $U_{\psi,s}^p$ *bị chặn trên* $L_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$.

(3) $U_{\psi,s}^p$ *bị chặn trên* $\dot{B}_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$.

Hơn nữa khi đó,

$$\left\|U_{\psi,s}^p\right\|_{L_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)\to L_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)} = \left\|U_{\psi,s}^p\right\|_{\dot{B}_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)\to \dot{B}_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)} = \mathcal{A}. \tag{2.2}$$

Nhận xét 2.1. Khi $s(t) = t$ và $\omega \equiv 1$, ta thu được kết quả của Định lý 2.1 và 2.3 của Fu, Wu(2017). Lưu ý rằng các định lý 2.1 và 2.3 của Fu, Wu(2017) chỉ đưa ra kết luận với $1 < q$, trong khi đó Định lý 2.1 chỉ ra tiêu chuẩn bị chặn cả trong trường hợp $q = 1$.

Hệ quả 2.1. *Toán tử* S^p *không bị chặn trong* $L^{1,\lambda}(\mathbb{Q}_p)$ *và trong* $B^{1,\lambda}(\mathbb{Q}_p)$, *với* $-1 < \lambda \leq 0$.

Nhận xét 2.2. Trường hợp $\lambda = -\frac{1}{q}$, không gian $\dot{B}_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ và $L_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ trở thành $L_\omega^q\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$, mặc dù chứng minh được sử dụng trong Định lý 2.1 không còn đúng nữa, tuy nhiên theo kết quả của Định lý 3.1 của Hung(2014), thì kết luận của Định lý vẫn đúng nhưng phải bổ sung thêm một điều kiện kĩ thuật $|s(t)|_p \geq |t|_p^\beta$ với $t \in \mathbb{Z}_p^*$ (có thể xem Định lý 3.1 trong chương 3).

Bây giờ chúng tôi sẽ đưa ra một áp dụng minh hoạ cho kết quả trên vào nghiên cứu nghiệm của các phương trình giả vi phân $p-$adic. Xét bài toán Cauchy sau

$$D^\alpha u + a(|x|_p)u = f(|x|_p), \quad x \in \mathbb{Q}_p$$

$$u(0) = 0,$$

trong đó a, f là các hàm liên tục, hàm cần tìm $u = u(|x|)$ là hàm bán kính. Để nghiên cứu tính giải được của bài toán trên, năm 2014, A. Kochubei xét nghiệm u có dạng $u = R_\alpha^p(v)$, trong đó R_α^p có dạng

$$R_\alpha^p f(x) = \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} \int_{|y|_p \leq |x|_p} \left(|x-y|_p^{\alpha-1} - |y|_p^{\alpha-1}\right) f(y)dy$$

với f là hàm khả tích địa phương trên $\mathbb{Q}_p$. Toán tử R_α^p là nghịch đảo phải của D^α trên không gian các hàm hằng địa phương, có vai trò như toán tử tích

phân hàm Riemann-Lioville trên trường thực. Xét $\psi_0(t) = \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}}|1-t|_p^{\alpha-1}$ và $\psi_1(t) = \psi_0(1-t)$ thì

$$|x_p|^{-\alpha} R_\alpha^p f(x) = U_{\psi_0}^p f(x) - U_{\psi_1}^p f(x).$$

Hệ quả 2.2. *Giả sử $0 < \alpha < 1$ và $1 \le q < \infty$ và $-\frac{1}{q} < \lambda < 0$. Khi đó R_α^p xác định như là một toán tử bị chặn từ $L^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p)$ vào $L^{q,\lambda}(|x|_p^{-\alpha q}dx, \mathbb{Q}_p)$.*

Định lí 2.2. *Nếu q, λ là các số thực thỏa mãn $1 < q < \infty, 0 \le \lambda < \frac{1}{d}$ thì $U_{\psi,s}^p$ bị chặn trên $CBMO_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ khi và chỉ khi $\mathcal{A}$ là hữu hạn. Hơn nữa,*

$$\|U_{\psi,s}^p\|_{CBMO_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right) \to CBMO_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)} = \mathcal{A}. \tag{2.3}$$

2.3. Giao hoán tử của toán tử $p-$adic Hardy-Cesàro

2.3.1. Các giao hoán tử và bổ đề bổ trợ

Giao hoán tử của toán tử $U_{\psi,s}^p$ được đưa ra bởi Hung(2014) xác định như sau

Định nghĩa 2.3. Cho $\psi : \mathbb{Z}^\star \to [0, \infty), s : \mathbb{Z}^\star \to \mathbb{Q}_p, b$ là hàm khả tích địa phương trên $\mathbb{Q}_p^d$, $f : \mathbb{Q}_p^d \to \mathbb{C}$ là hàm đo được. Giao hoán tử của toán tử p-adic Hardy-Cesàro có trọng $U_{\psi,s}^{p,b}$ được định nghĩa như sau:

$$U_{\psi,s}^{p,b} f(x) = \int_{\mathbb{Z}_p^\star} f(s(t)x)(b(x) - b(s(t)x))\psi(t)dt. \tag{2.4}$$

Bổ đề 2.1. *Giả sử rằng b là hàm thuộc $CBMO_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ và γ, γ' là các số nguyên. Giả sử $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho $\lambda \le \frac{1}{d}$, $1 < q < \infty$ và $\omega \in \mathcal{W}_\alpha$, với $\alpha > -d$. Khi đó ta có*

$$\left|b_{B_\gamma,\omega} - b_{B_{\gamma'},\omega}\right| \le c_\lambda p^{d+\alpha} |\gamma' - \gamma| \, \|b\|_{CBMO_\omega^{q,\lambda}} \max\{\omega\left(B_\gamma\right)^\lambda, \omega\left(B_{\gamma'}\right)^\lambda\}.$$

Kí hiệu

$$c_\lambda = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad \lambda = 0 \\ (d+\alpha)\ln p \cdot \frac{p^{(d+\alpha)\lambda}}{\left|p^{(d+\alpha)\lambda}-1\right|} \cdot |\lambda| & \text{nếu} \quad \lambda \ne 0. \end{cases}$$

2.3.2. Các kết quả chính

Định lí 2.3. *Cho q, q_1, q_2 là các số thực sao cho $1 < q < q_1 < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ và $-\frac{1}{q_1} < \lambda < 0$. Cho $s : \mathbb{Z}_p^\star \to \mathbb{Q}_p$ là hàm đo được sao cho $s(t) \ne 0$ hầu khắp nơi với $t \in \mathbb{Z}_p^\star$, $\omega \in \mathcal{W}_\alpha^p$. Giả sử rằng $b \in CBMO_\omega^{q_2}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$. Nếu cả $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ hữu hạn thì giao hoán tử $U_{\psi,s}^{p,b}$ xác định như một toán tử bị chặn từ $\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^n\right)$ vào $\dot{B}_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$. Ngược lại nếu $U_{\psi,s}^{p,b}$ là bị chặn từ $\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ vào $\dot{B}_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ thì $\mathcal{B}_\star$ hữu hạn. Ta kí hiệu*

$$\mathcal{B} = \int_{\mathbb{Z}_p^\star} |s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda} \cdot \left|\log_p |s(t)|_p\right| \cdot \psi(t)dt, \tag{2.5}$$

và

$$\mathcal{B}_\star = \left| \int_{\mathbb{Z}_p^\star} |s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda} \cdot \log_p |s(t)|_p \cdot \psi(t) dt \right|. \tag{2.6}$$

Hơn nữa,

$$\left(\frac{\|f_0\|_{\dot{B}_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)}}{\|f_0\|_{\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)}} \cdot \mathcal{B}_\star \right) \cdot \|b\|_{CBMO_\omega^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^d)} \leq \|U_{\psi,s}^{p,b}\|_{\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d) \to \dot{B}_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)} \cdot$$
$$\leq \left(2\mathcal{A} + p^{d+\alpha}\mathcal{B}\right) \cdot \|b\|_{CBMO_\omega^{q_2}(\mathbb{Q}_p^d)} \cdot$$

Vì $\log_p |s(t)|_p$ là số nguyên với bất kỳ $t \in \mathbb{Z}_p^\star$. Do đó $|s(t)|_p \neq 1$ hầu khắp nơi trên $\mathbb{Z}_p^\star$ thì $\mathcal{B} \geq \mathcal{A}$. Mặt khác nếu $|s(t)|_p \geq 1$ hầu khắp nơi với $t \in \mathbb{Z}_p^\star$ hoặc $|s(t)|_p \leq 1$ hầu khắp nơi với $t \in \mathbb{Z}_p^\star$ thì $\mathcal{B}_\star = \mathcal{B}$. Điều đó suy ra hệ quả sau.

Hệ quả 2.3. *Cho q, q_1, q_2 là các số thực sao cho $1 < q < q_1 < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ và $-\frac{1}{q_1} < \lambda < 0$. Cho $s : \mathbb{Z}_p^\star \to \mathbb{Q}_p$ là hàm đo được thỏa mãn $|s(t)|_p > 1$ hầu khắp nơi $t \in \mathbb{Z}_p^\star$ hoặc $|s(t)|_p < 1$ hầu khắp nơi với $t \in \mathbb{Z}_p^\star$. Nếu $b \in CBMO_\omega^{q_2}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ thì giao hoán tử $U_{\psi,s}^{p,b}$ xác định như một toán tử bị chặn từ $\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ vào $\dot{B}_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ khi và chỉ khi $\mathcal{B}$ hữu hạn.*

Nhận xét 2.3. Như ta đã biết, giao hoán tử của toán tử Hardy nói chung "kì dị hơn" so với toán tử Hardy tương ứng. Điều này cũng không ngoại lệ trong trường hợp không gian tâm Morrey. Thực tế, khi $|s(t)|_p < 1$ với hầu khắp nơi $t \in \mathbb{Z}_p^*$ thì $\mathcal{B}$ hữu hạn kéo theo $\mathcal{A}$ hữu hạn. Mặt khác, ví dụ sau đây chỉ ra $\mathcal{A}$ hữu hạn nói chung không thể suy ra $\mathcal{B} < \infty$.

Thật vậy, chọn $s(t) = pt$, $\psi(t) = \frac{1}{|pt|_p^{1+(d+\alpha)\lambda}\left(\log_p |pt|_p\right)^2}$, thì $\mathcal{A} < \infty, \mathcal{B} = \infty$.

Định lí 2.4. *Cho $1 < q < q_1 < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}, -\frac{1}{q} < \lambda < 0, -\frac{1}{q_1} < \lambda_1 < 0, 0 < \lambda_2 < \frac{1}{d}$ và $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Cho $s : \mathbb{Z}_p^\star \to \mathbb{Q}_p$ là hàm đo được sao cho $s(t) \neq 0$ hầu khắp nơi, $\omega \in \mathcal{W}_\alpha^p$. Nếu $\mathcal{C}$ hữu hạn thì với bất kỳ $b \in CBMO_\omega^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^d)$, giao hoán tử tương ứng $U_{\psi,s}^{p,b}$ bị chặn từ $\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^n)$ vào $\dot{B}_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$ và ta có*

$$\|U_{\psi,s}^{p,b}\|_{\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^d) \to \dot{B}_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)} \leq (2 + p^{d+\alpha} c_{\lambda_2}) \cdot \mathcal{C} \cdot \|b\|_{CBMO_\omega^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^d)} \cdot$$

Ở đây c_{λ_2} là hằng số được xác định như trong trong Bổ đề 2.1 và

$$\mathcal{C} = \int_{\mathbb{Z}_p^\star} \max\{1, |s(t)|^{(d+\alpha)\lambda_1}\} |s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda_1} \cdot |\log |s(t)|_p| \, \psi(t) dt.$$

Chương 3

TOÁN TỬ ĐA TUYẾN TÍNH P-ADIC HARDY-CESÀRO VÀ GIAO HOÁN TỬ TRÊN MỘT SỐ KHÔNG GIAN HÀM P-ADIC

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu các tiêu chuẩn cho tính bị chặn và chuẩn của toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro trên tích các không gian Lebesgue và tích các không gian kiểu Morrey. Lược đồ chứng minh các kết quả chúng tôi sử dụng ở đây được phát triển từ lược đồ đã được sử dụng trong chương trước, kết hợp với các phương pháp được sử dụng trong nghiên cứu các toán tử đa tuyến tính trên trường thực hay trên các nhóm compact địa phương. Bài toán tương ứng đặt cho giao hoán tử của toán tử p-adic Hardy-Cesàro cũng được chúng tôi nghiên cứu trong chương này. Phương pháp nghiên cứu ở đây đó là vận dụng phương pháp của Coifman, Rochberg, Weiss(1976) trong nghiên cứu toán tử giao hoán tử cho tích phân kì dị, toán tử cực đại, ... Bên cạnh đó, chúng tôi sẽ đi thiết lập đánh giá dao động giữa trung bình của hai hàm thuộc $CBMO$, từ đó thiết lập các đánh giá L^p cho các toán tử tích phân loại trung bình. Điểm khác biệt ở đây chính là đối với các toán tử tích phân kì dị, ta thường thông qua bất đẳng thức John-Nirenberg, thì ở đây chúng tôi đánh giá trực tiếp thông qua các bất đẳng thức tích phân Minkowski và Hölder.

Nội dung của chương này là dựa trên bài báo 2. trong danh mục công trình đã công bố.

3.1. Đặt bài toán

Dựa vào các phân tích như trong phần mở đầu, chương này chúng tôi nghiên cứu toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng phiên bản p-adic trên các không gian hàm phiên bản p-adic.

3.2. Chuẩn của toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro trên tích các không gian Lebesgue và tích các không gian kiểu Morrey

Để chứng minh các kết quả chính chúng tôi cần một số khái niệm và bổ đề quan trọng sau.

3.2.1. Một số khái niệm và bổ đề

Chúng tôi giới thiệu và nghiên cứa phiên bản p-adic của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng định nghĩa như sau:

Định nghĩa 3.1. Cho m, n là các số nguyên dương và $\psi : \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n \to [0; +\infty)$, $\overrightarrow{s} = (s_1, \ldots, s_m) : \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n \to \mathbb{Q}_p^m$ là các hàm đo được. Toán tử đa tuyến tính $p-$adic Hardy-Cesàro có trọng $U_{\psi,\overrightarrow{s}}^{p,m,n}$, xác định đối với vector của các hàm đo được $\overrightarrow{f} = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{Q}_p^d \to \mathbb{C}^m$, được định nghĩa như sau

$$U_{\psi,\overrightarrow{s}}^{p,m,n}(f_1, \ldots, f_m)(x) = \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \left(\prod_{k=1}^{m} f_k\left(s_k(t)x\right)\right) \psi(t)dt, \tag{3.1}$$

với $\overrightarrow{s} = (s_1, \ldots, s_m)$.

Nhận xét 3.1. Khi $m = n = 1, U_{\psi,\overrightarrow{s}}^{p,m,n}$ trở thành $U_{\psi,s}^{p}$ đã được nghiên cứu bởi Hung(2014).

Trong chương này, nếu không phát biểu đề cập đến thì ta luôn giả thiết q, α, q_i, α_j là các số thực, $1 \le q < \infty$, $1 \le q_j < \infty$, $\alpha_j > -d$ với mỗi $j = 1, \ldots, m$ sao cho

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m}, \tag{3.2}$$

và

$$\alpha = \frac{q\alpha_1}{q_1} + \cdots + \frac{q\alpha_m}{q_m}. \tag{3.3}$$

Cho các hàm trọng $\omega_k \in \mathcal{W}_{\alpha_k}^p, k = 1, \ldots, m$. Đặt

$$\omega(x) = \prod_{k=1}^{m} \omega_k^{\frac{q}{q_k}}(x), \tag{3.4}$$

khi đó ta có $\omega \in \mathcal{W}_\alpha^p$.

Định nghĩa 3.2. Cho các hàm trọng $\omega_k \in \mathcal{W}_{\alpha_k}^p, k = 1, \ldots, m$. Ta nói rằng $(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ thỏa mãn điều kiện $\mathcal{W}_{\overrightarrow{\alpha}}^p$ nếu

$$\omega(S_0) \ge \prod_{k=1}^{m} \omega_k(S_0)^{\frac{q}{q_k}}. \tag{3.5}$$

Ví dụ 3.1. Cho các hàm trọng $\omega_k \in \mathcal{W}_{\alpha_k}^p, k = 1, \ldots, m$ với $\omega_k(x) = |x|_p^{\alpha_k}$ với $k = 1, \ldots, m$ thì $(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ thỏa mãn điều kiện $\mathcal{W}_{\overrightarrow{\alpha}}^p$.

Trong toàn bộ chương này, $s_1, \ldots, s_m$ là các hàm đo được từ $\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n$ vào $\mathbb{Q}_p$ và ta kí hiệu bởi $\overrightarrow{s}$ là vectơ $(s_1, \ldots, s_m)$.

Bổ đề dưới đây là một ví dụ cho hàm thuộc không gian $L^r_\omega(\mathbb{Q}_p^d)$.

Bổ đề 3.1. *Cho $\omega \in \mathcal{W}_\alpha, \alpha > -d$ và $\gamma > 0$. Khi đó, các hàm*

$$f_{r,\gamma}(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } |x|_p < 1 \\ |x|_p^{-\frac{d+\alpha}{r}-\frac{1}{\gamma^2}} & \text{nếu } |x|_p \geq 1. \end{cases}$$

thuộc $L^r_\omega(\mathbb{Q}_p^d)$ và $||f_{r,\gamma}||_{L^r_\omega(\mathbb{Q}_p^d)} = \left(\dfrac{\omega(S_0)}{1-p^{-r/\gamma^2}}\right)^{1/r} > 0.$

3.2.2. Các kết quả chính

Các kết quả chính của mục này là các Định lý 3.1, 3.2, 3.3.

Định lí 3.1. *Giả thiết rằng $(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ thỏa mãn điều kiện $\mathcal{W}^p_{\overrightarrow{\alpha}}$ và tồn tại một hằng số $\beta > 0$ thỏa mãn $|s_k(t_1, \ldots, t_n)|_p \geq \min\{|t_1|_p^\beta, \ldots, |t_n|_p^\beta\}$ đúng với mọi $k = 1, \ldots, m$ và với $(t_1, \ldots, t_n) \in \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n$ hầu khắp nơi. Khi đó tồn tại một hằng số C sao cho bất đẳng thức sau*

$$||U^{p,m,n}_{\psi,\overrightarrow{s}}(f_1, \ldots, f_m)||_{L^q_\omega(\mathbb{Q}_p^d)} \leq C \prod_{k=1}^m ||f_k||_{L^{q_k}_{\omega_k}(\mathbb{Q}_p^d)} \tag{3.6}$$

đúng với bất kỳ hàm đo được $f_1, \ldots, f_m$ khi và chỉ khi

$$\mathcal{A} := \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^m |s_k(t)|_p^{-\frac{d+\alpha_k}{q_k}} \psi(t)dt < \infty. \tag{3.7}$$

Hơn nữa,

$$\left\|U^{p,m,n}_{\psi,\overrightarrow{s}}\right\|_{L^{q_1}_{\omega_1}(\mathbb{Q}_p^d)\times\cdots\times L^{q_m}_{\omega_m}(\mathbb{Q}_p^d)} = \mathcal{A}.$$

Nhận xét 3.2. Với $m = n = 1$ ta nhận được Định lý 3.1 của Hung(2014). Lưu ý rằng bất đẳng thức (13) cho hai dãy số thực không âm, là hệ quả trực tiếp của Định lý 3.1 của Hung(2014).

Định lí 3.2. *Cho $1 \leq q, q_k < \infty, \lambda, \alpha_k, \lambda_k$ là các số thỏa mãn (3.2), (3.3) sao cho $-\frac{1}{q_k} < \lambda_k < 0$ với $k = 1, \ldots, m$. Giả sử rằng $(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ thỏa mãn điều kiện $\mathcal{W}^p_{\overrightarrow{\alpha}}$. Đặt*

$$\lambda = \frac{d+\alpha_1}{d+\alpha}\lambda_1 + \cdots + \frac{d+\alpha_m}{d+\alpha}\lambda_m.$$

Giả thiết rằng

$$\mathcal{B} = \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^m |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \psi(t)dt < \infty, \tag{3.8}$$

và

$$(\omega(B_0))^{\frac{1+\lambda q}{q}} \geq \prod_{k=1}^{m} (\omega_k(B_0))^{\frac{1+\lambda_k q_k}{q_k}}, \tag{3.9}$$

với B_0 là hình cầu $\{x \in \mathbb{Q}_p^d : |x|_p \leq 1\}$. Tồn tại một hằng số C sao cho bất đẳng thức sau

$$||U_{\psi,\overrightarrow{s}}^{p,m,n}(f_1,\ldots,f_m)||_{L_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)} \leq C \prod_{k=1}^{m} ||f_k||_{L_{\omega_k}^{q_k,\lambda_k}(\mathbb{Q}_p^d)}, \tag{3.10}$$

đúng với bất kỳ hàm các đo được $f_1,\ldots,f_m$. Hơn nữa hằng số tốt nhất C trong (3.10) bằng $\mathcal{B}$.

Định lí 3.3. *Cho $q, q_k, \lambda, \alpha_k, \lambda_k$ là các số thỏa mãn các điều kiện như trong Định lý 3.2 và các điều kiện (3.2), (3.3) cũng được thỏa mãn. Giả sử rằng $(\omega_1,\cdots,\omega_m)$ thỏa mãn điều kiện $\mathcal{W}_{\overrightarrow{\alpha}}^p$. Khi đó $U_{\psi,\overrightarrow{s}}^{p,m,n}$ được xác định như một toán tử bị chặn từ $\dot{B}_{\omega_1}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^d) \times \cdots \times \dot{B}_{\omega_m}^{q_m,\lambda_m}(\mathbb{Q}_p^d)$ vào $\dot{B}_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$. Hơn nữa,*

$$||U_{\psi,\overrightarrow{s}}^{p,m,n}||_{\dot{B}_{\omega_1}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^d)\times\cdots\times\dot{B}_{\omega_m}^{q_m,\lambda_m}(\mathbb{Q}_p^d)\to\dot{B}_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)} = \mathcal{B}. \tag{3.11}$$

Nhận xét 3.3. Trường hợp $m = n = 1$ từ Định lý 3.2 và 3.3 ta thu được Định lý 2.1 trong chương 2 của luận án này.

3.3. Tính bị chặn của giao hoán tử của toán tử song tuyến tính Hardy- Cesàro có trọng

Trên trường $p-$adic, giao hoán tử của toán tử tích phân kiểu Hardy đã được nghiên cứu bởi các tác giả như Fu, Lu, Wu, Chuong, Hung,.... Ở đây chúng tôi cũng nghiên cứu giao hoán tử của toán tử song tuyến tính p-adic Hardy- Cesàro có trọng $U_{\psi,\overrightarrow{s}}^{p,2,n}$ với biểu trưng trong $CMO_\omega^q\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$.

3.3.1. Các giao hoán tử và bổ đề bổ trợ

Chúng tôi định nghĩa của giao hoán tử của toán tử song tuyến tính p-adic Hardy- Cesàro có trọng như sau:

Định nghĩa 3.3. Cho $n \in \mathbb{N}, \psi : \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n \to [0,\infty), s_1, s_2 : \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n \to \mathbb{Q}_p, b_1, b_2,$ là các hàm khả tích địa phương trên $\mathbb{Q}_p^d$ và $f_1, f_2 : \mathbb{Q}_p^d \to \mathbb{C}$ là các hàm đo được. Giao hoán tử của toán tử song tuyến tính p-adic Hardy- Cesàro có trọng $U_{\psi,\overrightarrow{s}}^{p,n}$ được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} &U_{\psi,\overrightarrow{s}}^{p,n,\overrightarrow{b}}(f_1,f_2)(x) = \\ &= \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \left(\prod_{k=1}^{2} f_k(s_k(t)x)\right)\left(\prod_{k=1}^{2}(b_k(x)-b_k(s_k(t)x))\right)\psi(t)dt. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Đặt

$$\mathcal{C}_2 = \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \left(\prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \right) \psi(t)dt. \tag{3.13}$$

$$\mathcal{D}_2 = \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \left(\prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \right) \left(\prod_{k=1}^{2} \left| \log_p |s_k(t)|_p \right| \right) \psi(t)dt. \tag{3.14}$$

Nhận xét 3.4. $\mathcal{D}_2 < \infty$ không suy ra $\mathcal{C}_2 < \infty$.

Nhận xét 3.5. Ngược lại, $\mathcal{C}_2 < \infty$ cũng không suy ra được $\mathcal{D}_2 < \infty$.

3.3.2. Các kết quả chính

Định lí 3.4. *Cho* $1 < q < q_k < \infty, 1 < p_k < \infty, -\frac{1}{p_k} < \lambda_k < 0, k = 1, 2$ *sao cho*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2},$$

và $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. *Giả thiết rằng* $\omega(x) = \omega_1^{\frac{q}{q_1}+\frac{q}{p_1}} \cdot \omega_2^{\frac{q}{q_2}+\frac{q}{p_2}}; \alpha = \frac{q\alpha_1}{q_1} + \frac{q\alpha_1}{p_1} + \frac{q\alpha_2}{q_2} + \frac{q\alpha_2}{p_2}$ *và*

$$\omega(B_0)^{\frac{1+\lambda q}{q}} \geq \prod_{k=1}^{2} \omega_k(B_0)^{\frac{1+\lambda_k q_k}{q_k}+\frac{1}{p_k}}.$$

(i) Nếu cả $\mathcal{C}_2$ *và* $\mathcal{D}_2$ *hữu hạn thì với bất kỳ các hàm* $b = (b_1, b_2) \in CBMO_{\omega_1}^{p_1}(\mathbb{Q}_p^d) \times CBMO_{\omega_2}^{p_2}(\mathbb{Q}_p^d)$ *khi đó* $U_{\psi,\vec{s}}^{p,n,\vec{b}}$ *bị chặn từ* $\dot{B}_{\omega_1}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^d) \times \dot{B}_{\omega_2}^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^d)$ *vào* $\dot{B}_{\omega}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$.

(ii) Nếu với bất kỳ $b = (b_1, b_2) \in CBMO_{\omega_1}^{p_1}(\mathbb{Q}_p^d) \times CBMO_{\omega_2}^{p_2}(\mathbb{Q}_p^d)$, $U_{\psi,\vec{s}}^{p,n,\vec{b}}$ *bị chặn từ* $\dot{B}_{\omega_1}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^d) \times \dot{B}_{\omega_2}^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^d)$ *vào* $\dot{B}_{\omega}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$ *thì* $\mathcal{D}_2$ *hữu hạn.*

Hệ quả 3.1. *Let* $1 < q < q_k < \infty, 1 < p_k < \infty, -\frac{1}{p_k} < \lambda_k < 0, k = 1, 2$ *sao cho*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$$

và $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. *Hơn nữa giả thiết rằng* $|s_k(t)|_p > 1$ *hkn với* $t \in \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n$ *hoặc* $|s_k(t)|_p < 1$ *hkn với* $t \in \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n$ *với mỗi* $k = 1, 2$. *Khi đó* $U_{\psi,\vec{s}}^{p,n,\vec{b}}$ *bị chặn từ* $\dot{B}_{\omega_1}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^d) \times \dot{B}_{\omega_2}^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^d)$ *vào* $\dot{B}_{\omega}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$ *nếu và chỉ nếu* $\mathcal{D}_2$ *hữu hạn.*

Thật vậy, vì $|x|_p > 1$ nên $|x|_p \geq p$, do đó ta có $\mathcal{D}_2 \geq (\log p)\, \mathcal{C}_2$. Vậy hệ quả 3.1 được suy ra trực tiếp từ Định lý 3.4.

Chương 4

TOÁN TỬ ĐA TUYẾN TÍNH HARDY-CESÀRO VÀ GIAO HOÁN TỬ TRÊN TÍCH CÁC KHÔNG GIAN LOẠI HERZ

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro trên tích các không gian Herz và tích các không gian Morrey-Herz. Đầu tiên chúng tôi đặt vấn đề nghiên cứu bài toán. Tiếp theo sử dụng phương pháp của Xiao(2001) và đã được vận dụng trong nhiều công trình khác nhau như Fu, Wu, Hung, Ky..., các kĩ thuật từ giải tích đa tuyến tính, chúng tôi thu được tính bị chặn của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro trên tích các không gian Herz và tích các không gian Morrey-Herz. Cuối cùng dựa vào phương pháp biến thực của Coifman-Rochberg-Weiss(1976), phương pháp đánh giá trong giải tích đa tuyến tính, và lược đồ nghiên cứu đã được hình thành của Fu, Gong, Lu, Yawn,... và đặc biệt của Hung, Ky, chúng tôi chứng minh giao hoán tử của toán tử này bị chặn từ tích các không gian tâm Morrey vào không gian tâm Morrey với biểu trưng trong không gian Lipschitz.

Nội dung của chương này là dựa trên bài báo 3. trong danh mục công trình đã công bố.

4.1. Đặt vấn đề

Bài toán đặt ra là nghiên cứu toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng trên tích các không gian Herz và không gian Morrey-Herz.

Dưới đây là định nghĩa toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng được đưa ra bởi Hung và Ky(2015)

Cho $m, n \in \mathbb{N}, \psi : [0,1]^n \to [0,\infty)$, $s_1, \ldots, s_m : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ là các hàm đo được. Toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng $U^{m,n}_{\psi,\overrightarrow{s}}$, được định nghĩa bởi

$$U^{m,n}_{\psi,\overrightarrow{s}}\left(\overrightarrow{f}\right)(x) = \int\limits_{[0,1]^n} \left(\prod_{k=1}^{m} f_k\left(s_k(t)x\right)\right)\psi(t)dt, \tag{4.1}$$

với $\overrightarrow{f} = (f_1, \ldots, f_m)$, $\overrightarrow{s} = (s_1, \ldots, s_m)$.

4.2. Tính bị chặn của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro trên tích các không gian Herz và Morrey-Herz.

4.2.1. Một số khái niệm và bổ đề

Chúng tôi nhắc lại định nghĩa của lớp hàm trọng thuần nhất giới thiệu bởi Chuong và Hung(2014).

Định nghĩa 4.1. Cho γ là một số thực bất kỳ. Đặt $\mathcal{W}_\gamma$ là tập tất cả các hàm ω xác định trên $\mathbb{R}^d$, là các hàm đo được thỏa mãn $\omega(x) > 0$ hầu khắp nơi với $x \in \mathbb{R}^d$, $0 < \int\limits_{S_d} \omega(y)d\sigma(y) < \infty$, và hàm thuần nhất tuyệt đối bậc γ, nghĩa là $\omega(tx) = |t|^\gamma \omega(x)$, với mọi $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \in \mathbb{R}^d$.

Chú ý rằng $\mathcal{W} = \bigcup\limits_\gamma \mathcal{W}_\gamma$ chứa tất cả các hàm trọng lũy thừa $\omega(x) = |x|^\gamma$.

Để cho thuận tiện chúng tôi đưa ra vài kí hiệu chung cho cả mục này. Cho $\beta > 0, \gamma, \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ là các số thực, $\gamma_1, \ldots, \gamma_m > -d$, $0 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$, $1 \le p_i, q_i < \infty$ với $i = 1, \ldots, m$ và $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \ge 0$ thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = \alpha$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$, $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots + \frac{1}{q_m} = \frac{1}{q}$, $\frac{\gamma_1}{q_1} + \frac{\gamma_2}{q_2} + \cdots + \frac{\gamma_m}{q_m} = \frac{\gamma}{q}$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = \lambda$. $S_d = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ $S_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$. Các hàm ω_i thuộc vào lớp $\mathcal{W}_{\gamma_i}$ với mọi $i = 1, \ldots, m$, đặt

$$\omega(x) = \prod_{i=1}^m \omega_i^{\frac{q}{q_i}}(x). \tag{4.2}$$

Với cách định nghĩa của ω như trên ta thấy $\omega \in \mathcal{W}_\gamma$.

Bổ đề 4.1. *Cho $p \ge 1$ và $(f_k)_{k\ge1}$ là các hàm không âm và đo được trên $[0,1]^n$. Khi đó ta có*

$$\sum_{k=1}^\infty \left(\int_{[0,1]^n} f_k(t)dt \right)^p \le \left(\int\limits_{[0,1]^n} \left(\sum_{k=1}^\infty f_k^p(t) \right)^{1/p} dt \right)^p.$$

Bổ đề 4.2. *Nếu $f \in M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega)$ thì $\|f\chi_k\|_{q,\omega} \le 2^{k(\lambda-\alpha)} \|f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega)}$.*

4.2.2. Các kết quả chính

Định lí 4.1. (i) *Cho $s_1(t), \ldots, s_m(t) \ne 0$ hầu khắp nơi trong $[0,1]^n$ và*

$$\mathcal{A}_1 = \int\limits_{[0,1]^n} \left(\prod_{i=1}^m |s_i(t)|^{-\alpha_i - \frac{d+\gamma_i}{q_i} + \lambda_i} \right) \psi(t)dt < \infty. \tag{4.3}$$

Giả sử rằng $1 \le p < \infty$ *hoặc* $0 < p < 1$ *và ít nhất một trong số các* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ *là dương thì*

$$\|U^{m,n}_{\psi,\overrightarrow{s}}(\overrightarrow{f})\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)} \le C_{\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\lambda}} \cdot \mathcal{A}_1 \cdot \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(\omega_i)}. \tag{4.4}$$

với

$$C_{\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\lambda}} = \begin{cases} \prod\limits_{k=1}^{m} \left(2^{|\alpha_k-\lambda_k|}+1\right) & \text{nếu} \quad 1 \le p < \infty \\ \frac{2^{\lambda}}{(2^{\lambda p}-1)^{1/p}} \prod\limits_{k=1}^{m} \left(2^{|\alpha_k-\lambda_k|}+1\right) & \text{nếu} \quad 0 < p < 1 \ \text{ và } \ \lambda > 0. \end{cases}$$

(ii) *Ngược lại cho* $0 < p < \infty$, $0 < \lambda_i < \infty$ *với* $i = 1, \dots, m$. *Giả sử rằng* $U^{m,n}_{\psi,\overrightarrow{s}}$ *được xác định như một toán tử bị chặn từ* $\prod\limits_{i=1}^{m} M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(\omega_i)$ *vào* $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)$ *thì (4.3) đúng và*

$$\|U^{m,n}_{\psi,\overrightarrow{s}}\|_{\prod\limits_{i=1}^{m} M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(\omega_i) \to M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)} \ge \mathcal{A}_1 \cdot D_{\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\lambda}}, \tag{4.5}$$

với

$$D_{\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\lambda}} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{m}(2^{\lambda_i p_i}-1)^{1/p_i}}{(2^{\lambda p}-1)^{1/p}} \cdot \frac{\left(1-2^{-q(\lambda-\alpha)}\right)^{1/q}}{\prod\limits_{i=1}^{m}(1-2^{-q_i(\lambda_i-\alpha_i)})^{1/q_i}} \cdot \frac{\prod\limits_{i=1}^{m}(q_i(\lambda_i-\alpha_i))^{1/q_i}}{(q(\lambda-\alpha))^{1/q}} \cdot \frac{(\omega(S_d))^{1/q}}{\prod\limits_{i=1}^{m}(\omega_i(S_d))^{1/q_i}}.$$

Định lí 4.2. (i) *Nếu* $1 \le p < \infty$, $s_1(t), \dots, s_m(t) \ne 0$ *hầu khắp nơi trong* $[0,1]^n$ *và*

$$\mathcal{A}_2 = \int\limits_{[0,1]^n} \left(\prod_{i=1}^{m} |s_i(t)|^{-\frac{d+\gamma_i}{q_i}-\alpha_i}\right) \psi(t)dt < \infty, \tag{4.6}$$

thì

$$\|U^{m,n}_{\psi,\overrightarrow{s}}(\overrightarrow{f})\|_{\dot{K}^{\alpha,p}_{q}(\omega)} \le \mathcal{A}_2 \cdot \prod_{k=1}^{m}\left(2^{|\alpha_k|}+1\right) \cdot \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{\dot{K}^{\alpha_i,p_i}_{q_i}(\omega_i)}. \tag{4.7}$$

(ii) *Giả sử rằng* $|s_i(t_1, \dots, t_n)| \ge \min\{t_1^{\beta}, \dots, t_n^{\beta}\}$ *với* $i = 1, \dots, m$ *và* $U^{m,n}_{\psi,\overrightarrow{s}}$ *bị chặn từ* $\prod\limits_{i=1}^{m} \dot{K}^{\alpha_i,p_i}_{q_i}(\omega_i)$ *vào* $\dot{K}^{\alpha,p}_{q}(\omega)$ *thì (4.6) đúng và*

$$\|U^{m,n}_{\psi,\overrightarrow{s}}\|_{\prod\limits_{i=1}^{m} \dot{K}^{\alpha_i,p_i}_{q_i}(\omega_i) \to \dot{K}^{\alpha,p}_{q}(\omega)} \ge \mathcal{A}_2 \cdot E_{\overrightarrow{\alpha}}, \tag{4.8}$$

ở đó

$$E_{\overrightarrow{\alpha}} = \frac{(mp)^{1/p}}{\prod\limits_{i=1}^{m} p_i^{1/p_i}} \cdot \left(\frac{2^{q\alpha}-1}{q\alpha}\right)^{1/q} \cdot \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{q_i\alpha_i}{2^{q_i\alpha_i}-1}\right)^{1/q_i} \cdot \frac{(\omega(S_d))^{1/q}}{\prod\limits_{i=1}^{m}(\omega_i(S_d))^{1/q_i}}.$$

Nhận xét 4.1. Khi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$ ta thu được tính bị chặn và chuẩn của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro trên tích các không gian Lebesgue. Tuy nhiên các kết quả này không tốt bằng các kết quả đã thu được của Hung, Ky(2015). Trong Định lí 3.1 của Hung, Ky(2015) chỉ ra rằng chuẩn của $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ từ $L^{p_1}_{\omega_1} \times \cdots \times L^{p_m}_{\omega_m}$ vào L^p_ω chính xác bằng $\int\limits_{[0,1]^n} \left(\prod\limits_{i=1}^{m} |s_i(t)|^{-\frac{d+\gamma_i}{q_i}-\alpha_i} \right) \psi(t)dt$.

Nhận xét 4.2. Từ kết quả của Định lý 4.2 chúng ta suy ra, trong trường hợp tồn tại hằng số dương β sao cho $|s_i(t_1, \ldots, t_n)| \geq \min\{t_1^\beta, \ldots, t_n^\beta\}$ với $i = 1, \ldots, m$ (lưu ý trường hợp toán tử $\mathcal{H}^m_\psi$ thì điều kiện này tự động được thoả mãn), thì $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ được xác định như một toán tử bị chặn từ $\prod\limits_{i=1}^{m} M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(\omega_i)$ vào $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)$ thì điều kiện cần và đủ là $\mathcal{A}_2$ hữu hạn. Hệ quả này, chứa hai kết quả là Định lý 5 và Định lý 6 của Gong, Fu và Ma(2014), hơn nữa để thu được điều kiện cần, các tác giả phải giả thiết $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m$, $p_1 = \cdots = p_m$ và $q_1 = \cdots = q_m$, tuy nhiên kết quả của chúng tôi không cần có giả thiết đó. Tương tự như vậy cho kết quả của Morrey-Herz, các kết quả của chúng tôi thu được trong Định lý 4.1 là thực sự làm mạnh các kết quả trước đó của Gong, Fu và Ma.

Nhận xét 4.3. Định lý 4.1 xem xét cả trường hợp khi $0 < p < 1$, ý tưởng tiếp cận trường hợp này được chúng tôi tham khảo từ công trình của J. Kuang(2008), trong đó tác giả đánh giá chuẩn của toán tử V_ψ trong không gian Herz. Chính vì vậy kết quả của chúng tôi là mở rộng hơn và mạnh hơn với kết quả tương ứng thu được của Gong, Fu, Ma(2014) và là mở rộng cho trường hợp đa tuyến tính của các công trình của Kuang, Liu, Fu, Chuong, Duong,....

4.3. Giao hoán tử của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro

Giao hoán tử của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$, theo nghĩa của Coifmann-Rochberg-Weiss, được xác định như sau

$$U^{m,n,\vec{b}}_{\psi,\vec{s}}\left(\vec{f}\right)(x) := \int\limits_{[0,1]^n} \left(\prod_{k=1}^{m} f_k\left(s_k(t)x\right) \right) \left(\prod_{k=1}^{m} \left(b_k(x) - b_k\left(s_k(t)x\right)\right) \right) \psi(t)dt. \tag{4.9}$$

Dựa theo ý tưởng của Tang, Xue, Zhou(2011), chúng tôi sẽ xem xét các biểu trưng thuộc lớp hàm Lipschitz, xác định như sau

Định nghĩa 4.2. Giả sử rằng $0 < \beta < 1$. Không gian Lipschitz $Lip^\beta(\mathbb{R}^n)$ là tập tất cả các hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sao cho

$$||f||_{Lip^\beta(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x,y\in\mathbb{R}^n, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\beta} < \infty. \tag{4.10}$$

4.3.1. Các kết quả chính

Định lí 4.3. *Cho* $\alpha_i > -d$, $1 \le q \le q_i < \infty$, $0 \le r_i$, $1 \le p_i < \infty$, $0 < \beta_i < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 \le \lambda_i, \lambda \le 1$ *với* $i = 1, \dots, m$, $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m > -d$, $\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_m$, $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m}$, *và* $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m} + \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m}$. *Giả thiết rằng* $b_i \in Lip^{\beta_i}$ *và* ω_i *thỏa mãn (4.2) với* $i = 1, \dots, m$. *Các hàm* $s_1(t), \dots, s_m(t) \neq 0$ *hầu khắp nơi* $t \in [0,1]^n$ *sao cho*

$$\int_{[0,1]^n} \left(\prod_{i=1}^{m} |s_i(t)|^{-\frac{d+\gamma_i}{q_i} + \lambda_i - \alpha_i} |1 - s_i(t)|^{\beta_i} \right) \psi(t) dt < \infty. \tag{4.11}$$

thì giao hoán tử $U^{m,n,\overrightarrow{b}}_{\psi,\overrightarrow{s}}$ *xác định như toán tử bị chặn từ* $M\dot{K}^{\alpha_1,\lambda_1}_{p_1,q_1}(\omega_1) \times \cdots \times M\dot{K}^{\alpha_m,\lambda_m}_{p_m,q_m}(\omega_m)$ *vào* $M\dot{K}^{\alpha',\lambda}_{p,q}(\omega)$ *khi* $0 < p < 1$ *và* $\lambda > 0$ *hoặc khi* $1 \le p < \infty$ *và* $\lambda \ge 0$. *Giả thiết rằng*

$$\alpha' = \alpha - \sum_{i=1}^{m} \beta_i - \sum_{i=1}^{m} \frac{d + \gamma_i}{r_i}. \tag{4.12}$$

Khi $m = n = 1$, $\omega_1 = 1$, $s_1(t) \equiv t$ thì $U^{1,1,\overrightarrow{b}}_{\psi,\overrightarrow{s}} = U^b_\psi$, ta thu được kết quả sau:

Hệ quả 4.1. *Cho* $\psi : [0;1] \to [0;\infty)$ *là hàm đo được,* $0 < \beta < 1$, $b \in Lip^\beta(\mathbb{R}^d)$, $1 \le q_2 \le q_1 < \infty$. *Nếu*

$$\mathcal{A} = \int_0^1 t^{-\left(\gamma_1 - \lambda - \frac{d}{q_1}\right)} (1-t)^\beta \psi(t) dt < \infty, \tag{4.13}$$

thì U^b_ψ *bị chặn từ* $M\dot{K}^{\alpha_1,\lambda}_{p,q_1}$ *vào* $M\dot{K}^{\alpha_2,\lambda}_{p,q_2}$, *với* $\alpha_1 = \alpha_2 + \beta + d\left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}\right)$.

Nhận xét 4.4. Trong Tang, Xue, Zhou(2011), để thu được tính bị chặn của U^b_ψ từ $M\dot{K}^{\gamma_1,\lambda}_{p,q_1}$ vào $M\dot{K}^{\gamma_2,\lambda}_{p,q_2}$, các tác giả cần điều kiện đủ đối với hàm ψ là:

$$\mathcal{C} = \int_0^1 t^{-\left(\gamma_1 - \lambda - \frac{d}{q_1}\right)} \psi(t) dt < \infty.$$

Tuy nhiên với $0 \le t \le 1$ thì $\mathcal{A} \le \mathcal{C}$. Thật vậy, chọn $\psi(t) = \frac{t}{(1-t)^{1+\beta/2}}$, $\gamma_1 - \lambda - \frac{d}{q_1} = 1$ suy ra $\mathcal{C} = \infty$ nhưng $\mathcal{A} < \infty$. Vậy kết quả chúng tôi thu được tốt hơn so với kết quả của Tang, Xue, Zhou.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Kết quả đạt được

Trong luận án này chúng tôi đã nghiên cứu tính bị chặn của toán tử loại Hardy và giao hoán tử của nó trên một số không gian hàm. Luận án đã đạt được các kết quả sau:

- Tìm được chuẩn của toán tử p-adic Hardy-Cesàro có trọng trên $L^{q,\lambda}_{\omega}(\mathbb{Q}_p^d)$, $\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ và $CMO^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$. Đồng thời đưa ra một điều kiện cần và một điều kiện đủ đối với $\psi(t)$ để $U^{p,b}_{\psi,s}$ bị chặn trên $\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ với biểu trưng trong $CMO^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$.
- Tìm được chuẩn của toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro có trọng trên tích các không gian $L^{q}_{\omega}(\mathbb{Q}_p^d)$, $L^{q,\lambda}_{\omega}(\mathbb{Q}_p^d)$ và $\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$. Đồng thời đưa ra được một điều kiện cần và một điều kiện đủ đối với $\psi(t)$ để giao hoán tử bị chặn trên tích các không gian $\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ với biểu trưng trong $CMO^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$.
- Đưa ra một điều kiện cần và một điều kiên đủ đối với lớp hàm trọng $\psi(t)$ để cho toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng bị chặn trên tích các không gian $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)$, $\dot{K}^{\alpha,p}_{q}(\omega)$. Hơn nữa chúng tôi cũng đưa ra được một điều kiện cần đối với $\psi(t)$ để giao hoán tử của chúng bị chặn trên tích các không gian $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)$ với biểu trưng trong $Lip^{\beta}(\mathbb{R}^d)$.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề mở liên quan cần được tiếp tục nghiên cứu:

- Nghiên cứu chuẩn của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng trên tích các không gian kiểu Herz thuần nhất, không thuần nhất có trọng, và giao hoán tử của nó trên tích các không gian Morrey-Herz thuần nhất có trọng.
- Nghiên cứu chuẩn của toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro có trọng trên tích các không gian p-adic kiểu Herz thuần nhất, không thuần nhất có trọng, và giao hoán tử của nó trên tích các không gian p-adic Morrey-Herz thuần nhất có trọng.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ CỦA LUẬN ÁN

1) Nguyen Minh Chuong, Ha Duy Hung, Nguyen Thi Hong (2016), Bounds of $p-$adic weighted Hardy-Cesàro operators and their commutators on $p-$adic weighted spaces of Morrey types, p-Adic Numbers Ultrametric Analysis, and Applications, 8(1), 31-44.

2) Nguyen Minh Chuong, Nguyen Thi Hong, Ha Duy Hung (2018), Bounds of weighted multilinear Hardy-Cesàro operators in $p-$adic functional spaces, Frontiers of Mathematics in China, **13**(1), 1-24.

3) Nguyen Minh Chuong, Nguyen Thi Hong, Ha Duy Hung (2017), Multilinear Hardy-Cesàro Operator and Commutator on the product of Morrey-Herz spaces, Analysis Mathematica, 43(4), 547-565.

Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại:

- Seminar của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.
- Hội thảo cho Nghiên cứu sinh, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, 2017.
- Seminar "Toán tử giả vi phân, sóng nhỏ, giải tích điều hòa trên các trường thực, p-adic" của Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam
- Đại hội toán học Việt Nam lần thứ IX, Nha Trang, 08/2018.